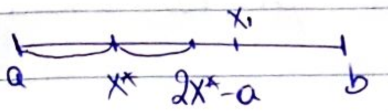
1/11/2017
8° μάθημα

Παρατήρηση: Έστω ότι η φ είναι συστολή στο $I=[a,b]$, αλλά η ακολουθία είναι καλά ορισμένη στο I. Τότε, δεν εξασφαλίζεται σύγκλιση $\forall\, x_0 \in I$.
Όμως, $\exists\, x_0 \in I$ για το οποίο εξασφαλίζεται η σύγκλιση αυτό είναι το κοντινότερο άκρο του I στη ρίζα x^*



Έστω a το κοντινότερο στο x^* άκρο. Αν πάρω $x_0=a$ τότε από τη συνθήκη συστολής έχουμε:

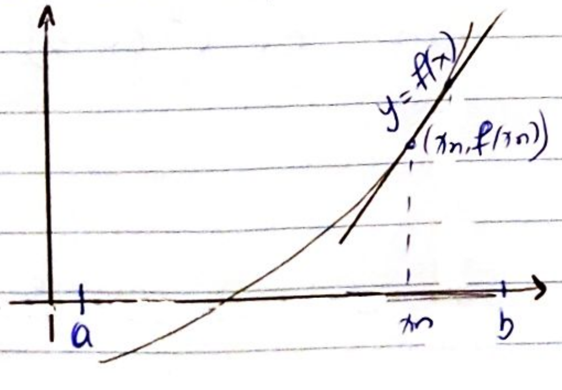
$$|x_{n+1}-x^*| \leq L\,|x_n-x^*|,\ L<1$$

Προκύπτει ότι x_1 θα βρίσκεται πιο κοντά στο x^* από ότι το a
Επομένως, $x_1 \in (a, 2x^*-a) \subset [a,b]$
και επαγωγικά έχουμε ότι $x_n \in (a, 2x^*-a) \in [a,b] \Rightarrow$
Για $x_0=a$, η ακολουθία είναι καλά ορισμένη.

Με μια εφαρμογή της μεθόδου Διχοτόμησης βρίσκουμε το πιο κοντινό άκρο.

Μέθοδος του Νεύτωνα

Έστω $f(x)=0$, $f \in C^1[a,b]$ και $x^* \in [a,b]$



Παίρνω την εφαπτομένη της καμπύλης στο $(x_n, f(x_n))$
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n} = \tan(\theta) = f'(x_n)$

$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \tan(\theta) = f'(x_n) \iff$$

$$\iff y = f(x_n) + (x - x_n)\cdot f'(x_n).$$

Θεωρώ x_{n+1} το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα των x. Τότε

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) \iff$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Η μέθοδος του Νεύτωνα ορίζει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad \mu\varepsilon\ x_0 \in I = [a,b].$$

αρκεί $f'(x_n) \neq 0$, $n = 0,1,2,\ldots$

Εξασφαλίζεται αν $f'(x) \neq 0$, $x \in I$.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}, \quad \text{αρκεί } f \in C^2[a,b]$$

Τάξη σύγκλισης ακολουθίας $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$

- Λέμε ότι η ακολουθία $x_n \to x^*$, είναι τουλάχιστον γραμμικής σύγκλισης (ή τουλάχιστον σύγκλισης τάξης I) αν υπάρχει $0<c<1$ και $n\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε:

$$|x_{n+1}-x^*| \le c|x_n-x^*|, \forall n\ge N$$

- Λέμε ότι η ακολουθία είναι τουλάχιστον τάξης $p>1$, εάν υπάρχει $c>0$ τέτοιος ώστε

$$|x_{n+1}-x^*| \le c|x_n-x^*|^p, \forall n\in \mathbb{N}_0.$$

⇒ Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τουλάχιστον τάξης $p>1$ τότε είναι και τουλάχιστον τάξης p, όπου $1<q<p$.

$$|x_{n+1}-x^*| \le c|x_n-x^*|^p = c|x_n-x^*|^{p-q}|x_n-x^*|^q = \tilde{c}|x_n-x^*|^q$$

⇒ Αν $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=a$ τότε αν $a\neq 0$ και $|a|<1$ είναι ακριβώς γραμμικής σύγκλισης.

⇒ Αν $\lim\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}=a\neq 0$ τότε είναι τάξης σύγκλισης ακριβώς p.

Για την ακολουθία $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n\in\mathbb{N}_0$, $\varphi\in C[a,b]$.
Από το θεώρημα μέσης τιμής:

$$x_{n+1}-x^*=\varphi(x_n)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi_n)(x_n-x^*),$$

ξ_n μεταξύ x_n κ x^*

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=\lim_{n\to\infty}\varphi'(\xi_n^*)=\varphi'(\lim_{n\to\infty}\xi_n^*)=\varphi'(x^*)$$

Για να αναζητήσουμε επαναληπτική μέθοδο που παράγει ακολουθία τάξης $p>1$ πρέπει $\varphi'(x^*)=0$.

Για την μέθοδο του Νεύτωνα $\varphi(x^*) = \frac{f(x^*) \cdot f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0$, αρκεί $f(x^*) \neq 0$

Επομένως, η μέθοδος Νεύτωνα είναι σύγκλισης τουλάχιστον $p \geq 1$.

Θεώρημα τοπικής σύγκλισης της Μεθόδου Νεύτωνα

Έστω x^* είναι απλή ρίζα της $f(x)=0$, $(f(x^*)=0,\ f'(x^*)\neq 0)$
Η f είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που περιέχει το x^*. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I με μέσο το x^* τέτοιο ώστε, η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα είναι καλά ορισμένη στο I και συγκλίνει x^* $\forall\, x_0 \in I$.

Για την ταχύτητα σύγκλισης ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

που σημαίνει ότι αν $f''(x)\neq 0$ τότε η ακολουθία είναι ακριβώς τετραγωνικής τάξης $(p=2)$

Αφού $\varphi'(x^*)=0$, τότε λόγω συνέχειας της φ' θα υπάρχει περιοχή του x^* τέτοια ώστε:

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1$$

Παίρνω ως I ένα κλειστό διάστημα της περιοχής αυτής με κέντρο το x^*. Τότε λόγω της $|x_{n+1}-x^*| \leq L|x_n - x^*|$ η ακολουθία είναι καλά ορισμένη στο I διότι το x^* είναι μέσο του διαστήματος και η φ είναι συστολή.
Άρα, η ακολουθία συγκλίνει.